7Н

УДК 519.876.5

Б.Б. Нестеренко, М.А. Новотарский
Институт математики НАН Украины, г. Киев, Украина
model@imath.kiev.ua

Решение краевых задач на дискретных клеточных нейронных сетях

В статье рассмотрена структура двумерной дискретной клеточной сети. Дано описание локально-асинхронного метода решения краевых задач на дискретных клеточных нейронных сетях. Описан алгоритм реализации мультисеточного метода. Изложены подходы к обучению дискретных клеточных нейронных сетей, использующие принципы пластичности и модификации весовых коэффициентов.

Введение

За более чем двадцать лет накоплен огромный опыт применения искусственных нейронных сетей к решению краевых задач математической физики. Большинство из известных подходов основываются на аппроксимационных свойствах многослойных нейронных сетей прямого распространения [1], [2]. В этом случае решение краевой задачи получают в аналитическом виде при условии, что отдельные нейроны используются как базовые элементы, параметры которых настроены таким образом, чтобы уменьшить ошибку аппроксимации решения. Однако использование этого подхода ограничено применением только прямых методов решения краевых задач. Применяемые в данном случае методы обучения нейронных сетей прямого распространения весьма трудоемки и не дают полной гарантии успешного решения поставленной задачи за конечное число шагов.

Более широкий спектр краевых задач может быть решен в случае, когда используется этап дискретизации области и преобразования, таким образом, исходной краевой задачи в систему разностных алгебраических уравнений. Полученную систему разностных уравнений отображают на структуру нейронной сети Хопфилда, а решение ищут путем минимизации сетевой энергетической функции [3]. Следует отметить, что использование сетей Хопфилда сопряжено с необходимостью преодоления типовых для сетей данного типа проблем попадания в локальные минимумы.

Наиболее адаптированными к решению рассматриваемых задач считаются клеточные нейронные сети (КНС). Этому способствует их структурная организация, представляющая собой двумерную или трехмерную однородную вычислительную среду с локальными связями между узловыми нейронами. Уже первые работы по клеточным нейронным сетям [4], [5] содержали ряд методов решения дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако и в этом случае не удалось избежать прямых методов решения, что существенно сужает круг решаемых задач.

В работе предлагается использовать преимущества численных методов при решении краевых задач на КНС. Принципиальным отличием применения численных методов от прямых методов в КНС следует считать необходимость решения задачи

синхронизации потоков данных. Данная проблема решается путем применения специальных локально-асинхронных методов, обеспечивающих сходимость итерационного процесса независимо от порядка взаимодействия между клетками. Возникающее при этом некоторое снижение скорости сходимости можно компенсировать за счет применения мультисеточных методов.

Локально-асинхронный метод для дискретных клеточных нейронных сетей

Будем рассматривать двумерную дискретную клеточную нейронную сеть (ДКНС), ориентированную на решение краевых задач математической физики. Структура такой сети состоит из некоторого набора дискретных нейронов, соединенных между собой каналами коммуникаций, как показано на рис. 1.

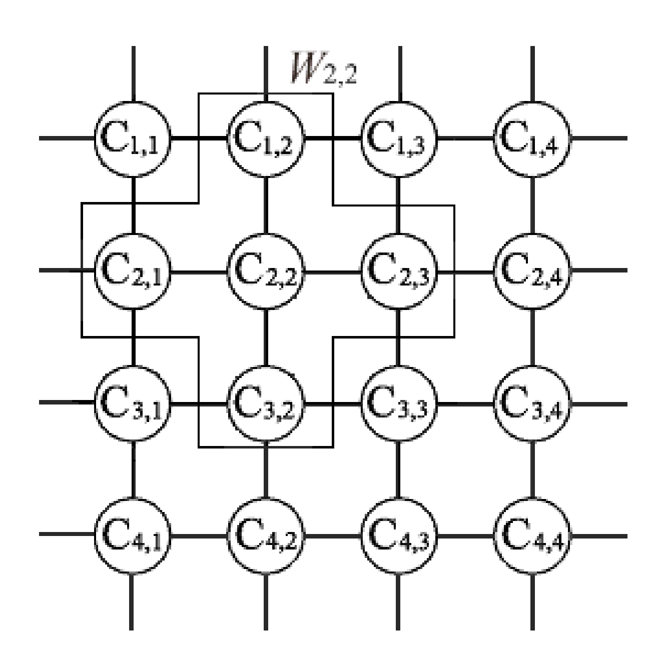


Рисунок 1 – Структура дискретной клеточной сети

Количество каналов коммуникаций может меняться, поэтому для задания структуры связей при реализации параллельного алгоритма решения краевой задачи на ДКНС для каждой клетки $C_{i,j}$ определяют множество координат соседних клеток $W_{i,j}$, мощность которого называют индексом соседства. Например, структура, показанная на рис. 1, имеет такие характеристики:

$$\alpha_{i,j} = \left|W_{i,j}\right| = 4,\ W_{i,j} = \left\{(i-1,j),(i,j+1),(i+1,j),(i,j-1)\right\}\ .$$

Произвольный клеточный нейрон $C_{i,j}$ представляет собой специализированное вычислительное устройство, реализующее вычислительный процесс решения краевой задачи локально-асинхронным численным методом [6] для некоторой

области дискретизации. Коммуникационные каналы обеспечивают асинхронную передачу результатов вычислений от клеточного нейрона $C_{i,j}$ к клеточным нейронам, входящим в соответствующее множество $W_{i,j}$, а также прием результатов вычислений от этих клеточных нейронов.

Краевую задачу зададим операторным уравнением с граничными и начальными условиями:

$$Av = \varphi\,,\ \ \overline{G} = G \cup \Gamma\,,\ \ v\big|_G = 0\,, \tag{1}$$

где Γ – граница, G – внутренняя область краевой задачи.

После выполнения традиционных операций по дискретизации области решения краевой задачи получим систему разностных уравнений:

$$Lu = f\,,\ \ \overline{g} = g \cup \gamma\ ,\ u\big|_g = 0\,, \tag{2}$$

где γ – дискретная граница, g – дискретная внутренняя область краевой задачи.

Клеточную нейронную сеть, ориентированную на локально-асинхронный метод [6], можно рассматривать как конечную совокупность вычислительных узлов, реализующих глобальный оператор L, который состоит из множества парасжимающих операторов:

$$L = \left\{ l_k \middle| k \in K \right\}\ . \tag{3}$$

Глобальный оператор $L : R^n \to R^n$ называют парасжимающим [7], если он непрерывный, а для неподвижной точки $з$ и произвольной точки $x \in R^n$ справедливо неравенство [8]:

$$\left\| L(x) - з \right\| < \left\| x - з \right\|, \tag{4}$$

при условии, что $x \neq з$.

Пусть задан парасжимающий глобальный оператор $L = \left\{ l_k \middle| k \in K \right\}$, $l_k : H^{m_k} \to H$, где $m_k \in \left\{ 1,...,m \right\}$, $H \subset R^n$, и множество начальных векторов X_0. Тогда асинхронной итерационной последовательностью будем называть последовательность $\{x(t)\}_{t=1}^{\infty}$ векторов $x(t) \in R^n$, определяемых по итерационной схеме:

$$x(t+1) = l_{k(t)}\Big(x\big(s_1(t)\big),...,x\Big(s_{m_{k(t)}}(t)\Big)\ \Big)\ ,\ t = 1,2...\,, \tag{5}$$

где $Q = \left\{ k(t) \middle| t = 1,2,... \right\}$ – последовательность элементов $k(t) \in K$,

$S=\{s_1(t),\cdots,s_i(t),\cdots,s_{m_{k(t)}}(t) \mid t=0,1,\cdots\}$ – множество целых неотрицательных чисел, которое соответствует условиям:

$$\begin{cases} 0 < s_i(t) \le t\ , & t > 0, \\ -M \le s_i(t) \le 0, & t = 0, \end{cases}$$

$X_0=\{x(s_1(0)),...,x(s_{m_{k(0)}}(0))\}$ – множество векторов, определяющих начальное состояние дискретной клеточной нейронной сети.

Таким образом, рассматриваемый итерационный метод однозначно определяется кортежем (L,X_0,Q,S) и может быть полностью асинхронным или частично асинхронным. Если оператор $l_{k(t)}(\cdot)$ допускает произвольное количество $m_{k(t)}$ аргументов с произвольным расстоянием $s_{m_{k(t)}}(t)$ от текущего итерационного шага аргумента с номером i, то метод будем (L,X_0,Q,S) называть полностью асинхронным при выполнении условий:

1. $\lim\limits_{t\to\infty} s_i(t)\to\infty \quad \forall i=1,...,m_{k(t)}, \forall k(t)\in K$.
2. $\{k(t)\}\cup\{k(t+1)\}\cup ...=K$.

Условие 1 указывает, что итерационная схема метода разрешает рассматривать элементы данных, которые отдалены от текущего итерационного шага на произвольное расстояние как аргументы оператора $l_{k(t)}(\cdot)$. Условие 2 обеспечивает существование неограниченного допустимого количества итераций. На практике чаще используют частично асинхронные методы. Метод (L,X_0,Q,S) будем называть частично асинхронным при выполнении условий:

1. $s=\max\limits_{t}\left(\max\limits_{b}(t-s_b(t))\right)$,
2. $\{k(t)\}\cup\{k(t+1)\}\cup ...\cup\{k(t+c)\}=K\ , c\in N, \forall t\in N$.

В таком методе вводят ограничительные константы s максимального расстояния от текущего итерационного шага и константу c, которая ограничивает максимально допустимое количество итераций.

Рассмотренный метод позволяет организовать вычисления на дискретной клеточной нейронной сети таким образом, чтобы исключить взаимную синхронизацию нейронов. Однако отсутствие синхронизации, как правило, приводит к потере производительности за счет снижения скорости сходимости. Исправить указанный недостаток можно путем использования мультисеточных методов.

Мультисеточный метод для ДКНС

Для дискретной краевой задачи (2) очередное приближение будем искать с помощью итерационного оператора

$$u(t)=Ц(u(t-1),f) \tag{6}$$

на последовательности вложенных сеток $g^{(0)}\supset g^{(1)}\supset\cdots\supset g^{(z)}$.

Для перехода между сетками необходимо предварительно задать операторы пролонгации P и рестрикции R.

Используя узловой способ разбиения области

$$g = \begin{bmatrix} x \in R^n, x = jh, j = (j_1,...,j_n), h = (h_1,...,h_n), \\ j_б = (0,1,...,n_б), h_б = \dfrac{1}{n_б}, б = 1,..n \end{bmatrix},$$

представим пролонгацию на двумерных сетках $g^{(i)}$ и $g^{(i+1)}$ с соотношением шагов дискретизации $\frac{h_1^{(i+1)}}{h_1^{(i)}} = \frac{h_2^{(i+1)}}{h_2^{(i)}} = 2$. Значения функции $u_{j_1,j_2}^{(i)}$ на сетке $g^{(i)}$ получаем в результате действия оператора билинейной пролонгации $u^{(i)} = P_{i+1}^i u^{(i+1)}$ на заданном шаблоне:

$$u_{j_1,j_2}^{(i)} = \begin{cases} \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j} = u_j^{(i+1)}, \\ \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j+e_1} = \frac{1}{2}\left(u_j^{(i+1)} + u_{j+e_1}^{(i+1)}\right), \\ \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j+e_2} = \frac{1}{2}\left(u_j^{(i+1)} + u_{j+e_2}^{(i+1)}\right), \\ \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j+e_1+e_2} = \frac{1}{4}\left(u_j^{(i+1)} + u_{j+e_1}^{(i+1)} + u_{j+e_2}^{(i+1)} + u_{j+e_1+e_2}^{(i+1)}\right), \end{cases} \quad (7)$$

где $e_1 = (1,0)$ − прирост координат по оси j_1;

$e_2 = (0,1)$ − прирост координат по оси j_2.

В случае доменного способа разбиения области непрерывные значения функции заменим множеством значений, размещаемых в геометрических центрах доменов сеточной области:

$$g = \begin{bmatrix} x \in R^n, x = (j-d)h, j = (j_1,..., j_n), h = (h_1,...,h_n), \\ d = (1,...,1)/2,\ j_\alpha = (0,1,...,n_\alpha), h_\alpha = \dfrac{1}{n_\alpha}, \alpha = 1,..n. \end{bmatrix}.$$

Тогда действие оператора двумерной доменной билинейной пролонгации будет иметь вид (рис. 2):

$$u_{j_1,j_2}^{(i)} = \begin{cases} \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j} = \frac{1}{16}\left(9u_j^{(i+1)} + 3u_{j+e_1}^{(i+1)} + 3u_{j+e_2}^{(i+1)} + u_{j+e_1+e_2}^{(i+1)}\right), \\ \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j+e_1} = \frac{1}{16}\left(9u_{j+e_1}^{(i+1)} u_j^{(i+1)} + 3u_j^{(i+1)} + 3u_{j+e_1+e_2}^{(i+1)} + u_{j+e_2}^{(i+1)}\right), \\ \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j+e_2} = \frac{1}{16}\left(9u_{j+e_2}^{(i+1)} u_j^{(i+1)} + 3u_j^{(i+1)} + 3u_{j+e_1+e_2}^{(i+1)} + u_{j+e_1}^{(i+1)}\right), \\ \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j+e_1+e_2} = \frac{1}{16}\left(9u_{j+e_1+e_2}^{(i+1)} + 3u_{j+e_1}^{(i+1)} + 3u_{j+e_2}^{(i+1)} + u_j^{(i+1)}\right), \end{cases} \quad (8)$$

где $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$ – координатные сдвиги относительно координаты $j = (j_1, j_2)$.

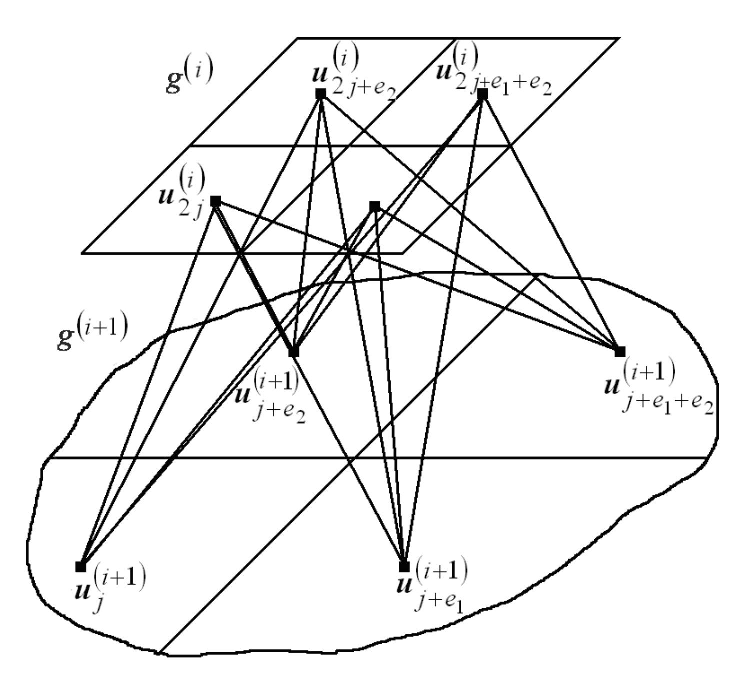


Рисунок 2 – Действие оператора доменной билинейной пролонгации на двумерной сетке

Переход с точной сетки на более грубую осуществляется с помощью действия оператора рестрикции $d^{(i+1)} = R_i^{i+1} d^{(i)}$. Выражение для двумерной билинейной узловой рестрикции зададим, используя координатные сдвиги $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$ для координатного вектора $j = (j_1, j_2)$:

$$d_j^{(i+1)} = \frac{1}{4}\Big(4d_{2j}^{(i)} + 2d_{2j-e_1}^{(i)} + 2d_{2j+e_1}^{(i)} + 2d_{2j-e_2}^{(i)}\, 2d_{2j+e_2}^{(i)} + \\ + d_{2j-e_1-e_2}^{(i)} + d_{2j+e_1+e_2}^{(i)} + d_{2j-e_1+e_2}^{(i)} + d_{2j+e_1-e_2}^{(i)}\Big). \qquad (9)$$

Алгоритм мультисеточного метода состоит из последовательности шагов:

I. Первое сглаживание приближения.

1. Выполнение α_1 раз итерационной формулы (6) на сетке $g^{(0)}$ с наименьшим шагом дискретизации:

$$u^{(i)}(t+\alpha_1) = Ц_{\alpha_1}^{(i)}\left(u^{(i)}(t), f^{(i)}\right). \qquad (10)$$

2. Вычисление невязки:

$$d^{(i)}(t) = \left(f^{(i)} - L^{(i)} u^{(i)}(t)\right) \qquad (11)$$

II. Вычисление погрешности на грубых сетках.

Этот шаг заключается в последовательном решении уравнения невязки на грубых сетках. Алгоритм переходов между грубыми сетками определяется циклом мультисеточного метода. Чаще всего применяют V-циклы или W-циклы. На каждой из грубых сеток, за исключением последней, определены такие виды операций:

1. Операция рестрикции:

$$d^{(i)}(t) = Rd^{(i-1)}(t), \quad 0 < i < i_{\max} \ . \tag{12}$$

2. Первое сглаживание погрешности:

$$\delta^{(i)}(t + \alpha_1) = Ц_{\alpha_1}^{(i)}\left(\delta^{(i)}(t), d^{(i)}\right), \tag{13}$$

для уравнения невязки $L^{(i)}\delta^{(i)} = d^{(i)}$ на сетке $g^{(i)}$.

3. Операция пролонгации и коррекции погрешности:

$$\delta^{(i)}(t) = \delta^{(i)}(t) + P\,\delta^{(i-1)}(t), \quad 0 < i < i_{\max}. \tag{14}$$

4. Второе сглаживание погрешности:

$$\delta^{(i)}(t + \alpha_2) = Ц_{\alpha_2}^{(i)}\left(u^{(i)}(t), f^{(i)}\right). \tag{15}$$

III. Коррекция на точной сетке.

1. Операция заключается в коррекции приближения $u^{(0)}(t)$ посредством вычисленной на грубых сетках погрешности $v^{(0)}(n)$:

$$u^{(0)}(t) = u^{(0)}(t) + \delta^{(0)}(t). \tag{16}$$

2. Второе сглаживание приближения:

$$u^{(0)}(t + \alpha_2) = Ц_{\alpha_2}^{(0)}\left(u^{(0)}(n), f^{(0)}\right). \tag{17}$$

Мультисеточный итерационный метод может быть описан рекурсивной процедурой $\boldsymbol{MGM}(i, j, Up)$, в которой параметр i указывает на текущий номер сетки, параметр j – на текущий номер цикла, а логический параметр Up отвечает за текущее направление движения вдоль сеток.

В случае, когда $j_{\max} = 1$, мультисеточный метод содержит V-циклы, а при $j_{\max} > 1$ возникают W-циклы. При $Up = \text{true}$ происходит процесс рестрикции, а при $Up = \text{false}$ – процесс пролонгации.

```
Procedure MGM(i, j, Up);
Begin
   If Not Up then
   Begin
      If i < i_max then
      Begin
         u[i] := Ц^(i)_α1 (u[i], f[i])
```

```
        f[i+1] := R_i^{i+1}(L^{(i)} · u[i] − f[i]);
        u[i+1] := 0;
        If j > 0 then MGM(i+1, j, Up) else Exit;
    end else
    Begin
        Up:=Not Up;
        j := j − 1;
        MGM(i−1, j, Up)
    end;
  end else
  Begin
    u[i] := u[i] + P_{i+1}^i · u[i−1];
    u[i] := Ц_{α_2}^{(i)}(u[i], f[i]);
    If i < 2 then
    Begin
        Up:= Not Up;
        If j = 0 then MGM(i−1, j, Up) else MGM(i, j, Up);
    end else MGM(i−1, j, Up);
  end;
End.
```

Обучение дискретных клеточных нейронных сетей

Способность к обучению является фундаментальным свойством искусственных нейронных сетей. Процесс обучения может рассматриваться как модификация межнейронных связей и настройка весовых коэффициентов для эффективного выполнения поставленной задачи. Существует большое количество правил и процедур обучения, зависящих от типа искусственных нейронных сетей. Если значение весовых коэффициентов и выбор структуры связей определяют путем предварительных расчетов, исходя из условий задачи, то такое обучение называют обучением с учителем. Если же весовые коэффициенты формируют как результат накопления опыта после многократного решения задачи, то такой процесс называется обучением без учителя.

Для данного типа дискретных клеточных нейронных сетей суть обучения состоит в определении межнейронных связей, возникающих в ходе решения краевых задач математической физики, а также весовых коэффициентов, повышающих сходимость итерационных процессов в нейронах. Использование различных межнейронных связей обусловлено применением мультисеточных методов. Данные методы реализуют вычисление на иерархической последовательности сеток $g^{(0)} \supset g^{(1)} \supset ... \supset g^{(z)}$, для каждой из которых нейрону $C_{i,j}$ соответствует набор соседних нейронов, определяемый множеством $W_{i,j}$. Особенность рассмотренного подхода состоит в том, что изменение межнейронных связей происходит без изменения структуры нейронной сети. Связи между нейронами, образующие сетки $g^{(z)}$, $z > 0$, обеспечивает механизм транзитных пересылок. Благодаря этому механизму, основанному на алгоритме транзитных

пересылок [9], возникает возможность организации вычислений на виртуальных сетках, структура которых не совпадает с физической структурой клеточной сети. Суть рассмотренных мультисеточных методов состоит в повышении эффективности решения краевых задач математической физики локально-асинхронным методом за счет сглаживания низкочастотной составляющей невязки на грубых сетках. Эффективность такого сглаживания зависит от последовательности применения W-циклов и V-циклов индивидуально для каждой конкретной краевой задачи. Следовательно, выбор конкретного алгоритма мультисеточного метода может рассматриваться как обучение клеточной нейронной сети.

Теперь рассмотрим методы обучения дискретных клеточных нейронных сетей, обеспечивающие улучшение показателей решения краевых задач путем модификации весовых коэффициентов нейронных связей. Известно, что скорость сходимости произвольного итерационного метода зависит от спектральных свойств разностного оператора. Поэтому существует возможность модификации системы разностных уравнений (2) к эквивалентной системе, имеющей то же решение при лучших спектральных свойствах разностного оператора L. Пусть оператор L задан в виде матрицы коэффициентов системы разностных уравнений (2). Тогда предположим существование некоторой матрицы W такой, что модифицированная система разностных уравнений

$$W^{-1}Lu(x) = W^{-1}f(x) \tag{18}$$

имеет то же решение, что и система $Lu(x) = f(x)$, но спектральные свойства матрицы коэффициентов $W^{-1}L$ лучшие, чем матрицы коэффициентов L. Существует большое количество подходов к определению матрицы W [10] в зависимости от выбора метода ускорения.

Как один из примеров применения методов ускорения к обучению дискретных клеточных нейронных сетей приведем полиномиальное ускорение [11]. Пусть $\{r(t)\}_{t=0}^{\infty}$ – последовательность итерационных приближений, определяемая по правилу:

$$r(t) = \Phi r(t-1). \tag{19}$$

Текущая погрешность итерационного процесса (19) определяется по формуле

$$\bar{e}_t = r(t) - v, \tag{20}$$

где v – точное решение уравнения (1).

Исходя из (19), определим Φ^t :

$$\bar{\varepsilon}(t) = \Phi\bar{\varepsilon}(t) = \Phi^t\bar{\varepsilon}(0). \tag{21}$$

Для ускорения сходимости последовательности итерационных приближений $\{r(t)\}_{t=0}^{\infty}$ рассмотрим новую последовательность векторов $\{u(t)\}_{t=0}^{\infty}$, определяемую линейными комбинациями:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{t} w_{t,i}r(i),\ t = 0,1,\cdots \tag{22}$$

исходя из того, что коэффициенты $w_{t,i}$ соответствуют условию:

$$\sum_{i=0}^{t} w_{t,i} = 1, \; t = 0,1,\cdots. \tag{23}$$

Условие (23) гарантирует тот факт, что $u(t) = v \; \forall t \geq 0$, если $r(0) = v$.

Обозначив через $\varepsilon(t) = u(t) - v$ вектор погрешности, который соответствует векторам $u(t)$ с (22), получим с учетом (22) и (23), что

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{t} w_{t,i} r(i) - v = \sum_{i=0}^{t} w_{t,i} \left(r(i) - v\right) = \sum_{i=0}^{t} w_{t,i} \bar{\varepsilon}(t).$$

Используя (21), представим $\varepsilon(t)$ в виде

$$\varepsilon(t) = \left(\sum_{i=0}^{t} w_{t,i} \Phi^{i} \right) \bar{\varepsilon}(0). \tag{24}$$

Поскольку, исходя из (21) и (24), справедливо равенство $\bar{\varepsilon}(0) = \varepsilon(0)$, выразим вектор $\varepsilon(t)$ в виде зависимости:

$$\varepsilon(t) = W_t(\Phi) \varepsilon(0), \tag{25}$$

где $W_t(\Phi)$ – матричный многочлен типа:

$$W_t(\Phi) = w_{t,0}\mathbf{I} + w_{t,1}\Phi^{1} + \cdots + w_{t,t}\Phi^{t},$$

где $W_t(1) = 1$.

Учитывая формулу для вектора погрешности (24), будем называть комбинированную процедуру (19) и (22) методом полиномиального ускорения, который может быть применим к обучению дискретной клеточной сети, ориентированной на реализацию итерационного процесса (19).

Выводы

При использовании известных искусственных нейронных сетей, а также при исследовании новых подходов к структурной организации нейронных сетей все большее внимание уделяется созданию адаптированных к ним вычислительных методов. Попытки решения краевых задач математической физики предпринимались на многослойных сетях прямого распространения и сетях Хопфилда. Для более тесной адаптации структур нейронных сетей к поставленной задаче были созданы клеточные нейронные сети, содержащие модифицированные нейроны, реализующие функцию интегрирования. Все перечисленные структурные реализации предполагают использование прямых методов решения дифференциальных уравнений. С целью расширения круга решаемых задач в данной работе предлагается использование

численных методов решения краевых задач. Для этого используют дискретные клеточные нейронные сети, ориентированные на специальные локально-асинхронные методы совместно с мультисеточными методами. Дискретный характер вычислений в таких сетях потребовал пересмотра подходов к их обучению. Предложено два направления развития методов обучения. Первый основывается на использовании свойства пластичности, реализуемого посредством транзитных пересылок. Второй реализуется за счет модификации весовых коэффициентов, обеспечивающей увеличение скорости сходимости численного метода за счет изменения спектра разностного оператора.

Литература

1. Lagaris I.E., Likas A.C., Fotiadis D.I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations // IEEE Transactions on Neural Networks. – 1998. – Vol. 9, № 5. – P. 987-1000.
2. Lagaris I.E., Likas A.C., Papageorgiou D.G. Neural-network methods for boundary value problems with irregular boundaries // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2000. – Vol. 11, № 5. – P. 1041-1049.
3. Lee H., Kang I.S. Neural algorithm for solving differential equations // Journal of Computational Physics. – 1990. – Vol. 91, № 1. – P. 110-131.
4. Chua L.O., Yang L. Cellular Neural Networks. Applications // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1988. – Vol. 35, № 10. – P. 1273-1290.
5. Chua L.O., Yang L. Cellular Neural Networks. Theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1988. – Vol. 35, № 10. – P. 1257-1272.
6. Новотарський М.А., Нестеренко Б.Б. Штучні нейронні мережі: обчислення. – Київ: Інститут математики НАН України, 2004. – 408 с.
7. Elsner L., Koltracht I., Neumann M. On the convergence asynchronous paracontractions with application to tomographic reconstruction from incomplete data // Linear Algebra and its Applications. – 1990. – Vol. 130, № 1. – P. 65-82.
8. Pott M. On the convergence of asynchronous iteration methods for nonlinear paracontactions and consistent linear systems // Linear Algebra and its Applications. – 1998. – Vol. 283, № 1-3. – P. 35-60.
9. Новотарский М.А. Клеточные нейронные сети с транзитными пересылками // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2004. – № 2. – С. 118-121.
10. Morè J.J. Nonlinear generalizations of matrix diagonal dominance with application to Gauss-Seidel iterations // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1972. – Vol. 9. – P. 357-378.
11. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 448 с.

Б.Б. Нестеренко, М.А. Новотарський

Розв’язування крайових задач на дискретних кліткових нейронних мережах

У статті розглянуто структуру двовимірної дискретної кліткової мережі. Дано опис локально-асинхронного методу розв’язування крайових задач на дискретних кліткових нейронних мережах. Описано алгоритм реалізації багатосіткового методу. Викладено підходи до навчання дискретних кліткових нейронних мереж, що використовують принципи пластичності й модифікації вагових коефіцієнтів.

B.B. Nesterenko, M.A. Novotarskiy

Solving boundary value problems on discrete cellular neural networks

The structure of a bidimentional discrete cellular network is considered. The description of a local – asynchronous method for solving boundary value problems on discrete cellular neural networks is given. The algorithm of realization of a multigrid method is described. Approaches to training the discrete cellular neural networks, using principles of plasticity and updating of weighting coefficients are stated.

Статья поступила в редакцию 28.05.2008.